



ce
pre
UNI

Álgebra

TEMA LOGICA

**CICLO
PREUNIVERSITARIO**

2024-1



INTRODUCCIÓN

Definición: La Lógica estudia la validez de los razonamientos

Cuando un individuo afirma algo, tiene que argumentar como llegó a esa conclusión. Todo argumento civilizado (lo que escuchamos o leemos) esta hecho sobre un razonamiento (una estructura de pensamiento que en base a premisas aceptadas como ciertas obtenga una conclusión), la lógica valida estos razonamientos.

En la clase de hoy haremos estudio de la Lógica Proposicional o lógica de orden cero, la cual trabaja sobre unas unidades de pensamiento llamadas proposiciones, relacionándolas a través de los llamados conectivos lógicos y analizando esas relaciones. Resaltamos que en esta parte no nos interesa mucho lo que digan las proposiciones en sí, sino como se relacionan para establecer razonamientos válidos.

PROPOSICIONES Y CONECTIVOS LÓGICOS

Definición: Una **proposición lógica** es un enunciado que:

- 1) Afirma algo acerca de un sujeto
- 2) Tiene o puede asignársele un valor de verdad esto es, puede ser verdadero (V) o falso (F), uno y solo uno de ellos.

Ejemplos de proposiciones:

- p: Juan trabaja en la Uni
q: María nunca será tu esposa
r: Pedro ingresará a la UNI
s: $12 + 8 = 20$
t: $14 + 2 \geq 14$

No son proposiciones:

- El estudia en Cepre-Uni
¡ Arriba Perú !
¿Qué hora es?
 $x + 22 = 21$
 $x + 1 < 15$

Las proposiciones se denotan con letras minúscula

Definición: Conectivos lógicos son un símbolos que unen dos o mas proposiciones, formando así una nueva proposición lógica.

Ejemplos

Nueva proposición

No es cierto que Juan es Ingeniero Mecánico

Pedro no estudia

5 es menor que 7 y 9 es igual a 10

Roberto estudia pero estudia en las tardes

Wilfredo va al estadio o va al coliseo

Si $7 \leq 10$ entonces $23=10$

Representación

$\sim p$

$\sim p$

$p \wedge q$

$p \wedge q$

$p \vee q$

$p \rightarrow q$

Nueva proposición

Representación

Pedro Ingresa a la Uni **solo si** estudia en Cepre-uni.

$$q \rightarrow p$$

Solo si Federico te quiere, te hará feliz

$$p \rightarrow q$$

Juan ingresa **si y solo si** estudia

$$p \leftrightarrow q$$

Patricia te ama **siempre y cuando** seas fiel

$$p \leftrightarrow q$$

O Pedro Trabaja **O** Pedro va al colegio

$$p \Delta q$$

O Jorge estudia **O** Jorge es futbolista

$$p \Delta q$$

Definición:

Al acto de generar una nueva proposición mediante un conector o conectivo lógico se le llama Operación Lógica

Operación LógicaConectivo usado

Negación

 $\sim$

Conjunción

 $\wedge$

Disyunción

 $\vee$

Condicional

 $\rightarrow$

Bicondicional

 $\leftrightarrow$

Disyunción excluyente

 $\triangle$ **Definición:**

1) Una **proposición simple**, es aquella proposición que no tiene ningún conectivo lógicos.

2) Una **proposición compuesta**, es aquella proposición que tiene una o mas conectivos lógicos

Son proposiciones simples

Colombia tiene grandes ciudades

Esteban sabe conducir Triales

Pedro es Ingeniero Mecánico

Fortunato y Adelina son novios

Ejercicio1:

Señale cuales de los siguientes son proposiciones:

- I. ¿Por qué no cambias de camisa?
- II. Mi auto se estrelló en plena curva
- III. ¡Arriba Perú!
- IV. El número 4 es menor que el número 13
- V. En Juliaca hay bajas temperaturas
- VI. María es Hermosa.

Resolución:

- I. No es proposición.
- II. Si es proposición.
- III. No es proposición.
- IV. Si es proposición.
- V. Si es proposición.
- VI. No es proposición.

Ejercicio2:

Señale cuales de las siguientes proposiciones son compuestas:

- I. Pedro y Josefina son compañeros de trabajo.
- II. Iré siempre al estadio dado que el futbol en Perú es malo.
- III. O mejoramos las notas o no ingresamos
- IV. María ríe, pero esta reprobada en el curso de análisis.
- V. Enrique se pondrá triste si Roberto no va a la reunión.

Resolución:

- I. Proposición simple
- II. Proposición compuesta
- III. Proposición compuesta
- IV. Proposición compuesta
- V. Proposición compuesta

FÓRMULAS LÓGICAS Y TABLAS DE VERDAD

Definición:

Una **Fórmula Lógica** es la representación simbólica de una Proposición, indicándose en el caso de una proposición compuesta los conectivos lógicos que la generan.

Algunas Fórmulas Lógicas

$$p$$
$$p \vee \sim q$$
$$\sim p \rightarrow q$$
$$\sim \{(\sim p \leftrightarrow q) \rightarrow \sim r\}$$
$$((\sim p \vee q) \leftrightarrow p) \vee \sim q$$

Definición:

Una **Tabla de verdad** nos señala el valor de verdad de una fórmula lógica, para cada estado de verdad que generan las proposiciones simples que la conforman.

Estados
de
verdad



p	q	f(p;q)
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

$$N^{\circ} \text{ de estados de verdad} = 2^{N^{\circ} \text{ de proposiciones}}$$

TABLA DE VERDAD DE LA CONJUNCIÓN:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La conjunción es **Verdadera** solo si ambas proposiciones son **Verdaderas**

Ejemplo: Enrique es electricista y Juan es mecánico (V)

Se concluye: Enrique es electricista (V)

Juan es mecánico (V)

TABLA DE VERDAD DE LA DISYUNCIÓN

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disyunción es **Falsa** solo si ambas proposiciones son **Falsas**

Ejemplo:

$$5 \leq 2 \quad \text{o} \quad 10 = 20$$

(F)

Se concluye: $5 \leq 2$

(F)

$$10 = 20$$

(F)

TABLA DE VERDAD DE LA NEGACIÓN

p	$\sim p$
V	F
F	V

La negación tiene un valor de verdad distinto al de la proposición original.

TABLA DE VERDAD DE LA CONDICIONAL

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La condicional es **Falsa** solo si el antecedente es Verdadero y el consecuente es Falso

Ejemplo

Si Eladio trabaja entonces Eladio tiene plata (F)

Se concluye: Eladio trabaja (V)
Eladio tiene plata (F)

Observaciones de la condicional

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

1) Si el antecedente es Falso entonces la condicional es verdadera

2) Si el consecuente es Verdadero entonces la condicional es verdadera

3) En la condicional $p \rightarrow q$ se dice que:

p es suficiente para q

q es necesario para p

$q \rightarrow p$ es su recíproco

$\sim q \rightarrow \sim p$ es su contrarrecíproco

TABLA DE VERDAD DE LA BICONDICIONAL

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La Bicondicional es **Verdadera** solo si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad

Observacion

En la bicondicional $p \leftrightarrow q$ se dice que:
 q es suficiente y necesario para p

TABLA DE LA DISYUNCIÓN EXCLUYENTE

p	q	$p \Delta q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disyunción excluyente es **Verdadera** solo si ambas proposiciones tienen distinto valor de verdad

Observación Si son verdaderas ambas a la vez la Disyunción excluyente es FALSA

Ejercicio 3:

Elabore la tabla de verdad de la siguiente formula lógica :

$$(p \vee q) \Delta (p \wedge q)$$

p	q	$(p \vee q) \Delta (p \wedge q)$
V	V	V F V
V	F	V V F
F	V	V V F
F	F	F F F

Ejercicio 4:

Señale los valores de Verdad de p, q, r, s, t si la siguiente proposición compuesta presentada como fórmula lógica es Falsa:

$$[p \wedge \sim q] \rightarrow [r \rightarrow (s \vee \sim t)]$$

Resolución:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \overbrace{\hspace{1.5cm}}^{(V)} & & & \overbrace{\hspace{2.5cm}}^{(F)} & & & & \\
 [& p & \wedge & \sim & q &] & \rightarrow & [& r & \rightarrow & (& s & \vee & \sim & t &) &] \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 (V) & & & & (V) & & & & (V) & & & (F) & & & \overbrace{\hspace{0.5cm}}^{(F)} & & \\
 & & & & & & & & & & & \overbrace{\hspace{0.5cm}}^{(F)} & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & (V) & & & \overbrace{\hspace{0.5cm}}^{(F)} & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 p(V) & q(F) & r(V) & s(F) & t(V) & & & & & & & & & & & &
 \end{array}$$

EQUIVALENCIAS LÓGICAS, TAUTOLOGÍA Y CONTRADICCIÓN

Definición: Dos fórmulas lógicas A y B son **equivalentes** ($A \equiv B$) si tienen el mismo valor de Verdad en cada Estado de Verdad.

Ejemplos

p	q	$\sim p \rightarrow q$	$p \vee q$
V	V	V	V V V
V	F	V	V V F
F	V	V	F V V
F	F	F	F F F

$\sim p \rightarrow q$ es equivalente a $p \vee q$
 $\sim p \rightarrow q \equiv p \vee q$

p	q	$\sim p \vee (\sim p \wedge q)$	$\sim p$
V	V	F F F	F
V	F	F F F	F
F	V	V V V	V
F	F	V V F	V

$\sim p \vee (\sim p \wedge q)$ es equivalente a $\sim p$
 $\sim p \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p$

Definición: Una Fórmula Lógica es **Tautología** si es **Verdadera** en cualquier estado de Verdad generado por las proposiciones que la conforman.

Ejemplo

p	q	$(\sim p \vee q) \vee p$
V	V	V V V
V	F	F V V
F	V	V V F
F	F	V V F

$(\sim p \vee q) \vee p$ es Tautología

$$(\sim p \vee q) \vee p \equiv V$$

Definición: Una Fórmula Lógica es **Contradicción** si es **Falsa** en cualquier estado de Verdad generado por las proposiciones que la conforman.

Ejemplo

p	q	$\sim[(p \rightarrow q) \vee \sim q]$
V	V	F V V F
V	F	F F V V
F	V	F V V F
F	F	F V V V

$\sim[(p \rightarrow q) \vee \sim q]$ es Contradicción

$$\sim[(p \rightarrow q) \vee \sim q] \equiv \mathbf{F}$$

Definición: Una Fórmula Lógica es **Contingencia** si no es **Tautología** ni es **Contradicción**

Ejemplo

p	q	$(p \rightarrow q) \wedge \sim p$
V	V	V F F
V	F	F F F
F	V	V V V
F	F	V V V

$(p \rightarrow q) \wedge \sim p$ es Contingencia

Ejercicio 5:

Señale si las proposiciones son Tautologías(**V**) o contradicciones(**F**)

- I. $(p \wedge q) \rightarrow (p)$
- II. $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
- III. $q \wedge \sim(p \rightarrow q)$

p	q	$(p \wedge q) \rightarrow p$	$(\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$	$q \wedge \sim(p \rightarrow q)$
V	V	V V V	F V V V V	V F F V
V	F	F V V	F F F V F	F F V F
F	V	F V F	V V V V V	V F F V
F	F	F V F	V V F V V	F F F V

Propuesto 1:

Siendo p, q, r proposiciones, señale el valor de verdad de:

- I. $p \rightarrow V \equiv V$
- II. $p \Delta F \equiv p$
- III. $[\sim p \rightarrow (q \vee r)] \wedge p \equiv q$

Rpta: V V F

Propuesto 2:

Siendo p y q proposiciones lógicas, definimos el operador “ $*$ ” con la siguiente tabla:

p	q	$p * q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Determine una expresión equivalente de: $(p * q) \rightarrow \sim q$

Rpta: $\sim q$

ÁLGEBRA PROPOSICIONAL

1a. $p \vee p \equiv p$

2a. $p \vee q \equiv q \vee p$

3a. $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

4a. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

1b. $p \wedge p \equiv p$

2b. $p \wedge q \equiv q \wedge p$

3b. $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

4b. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

5a. $p \vee \sim p \equiv V$

6a. $p \vee V \equiv V$

7a. $p \vee F \equiv p$

5a. $p \wedge \sim p \equiv F$

6a. $p \wedge V \equiv p$

7a. $p \wedge F \equiv F$

Leyes de Morgan

8a. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

8b. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

Leyes de Absorción

9a. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

9b. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

Falsa Absorción

10a. $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

10b. $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

Condicional

11. $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

12. $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

Bicondicional

13. $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Negación

$$14. \sim(\sim p) \equiv p$$

$$15. \sim(V) \equiv F$$

$$16. \sim(F) \equiv V$$

Disyunción excluyente

$$17. p \triangle q \equiv \sim(p \leftrightarrow q)$$

Bicondicional

$$18a. p \leftrightarrow p \equiv V$$

$$19a. p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$$

$$20a. \sim(p \leftrightarrow q) \equiv (\sim p \leftrightarrow q) \\ \equiv (p \leftrightarrow \sim q)$$

$$21a. \sim p \leftrightarrow \sim q \equiv p \leftrightarrow q$$

Disyunción excluyente

$$18b. p \triangle p \equiv F$$

$$19b. p \triangle q \equiv q \triangle p$$

$$20b. \sim(p \triangle q) \equiv (\sim p \triangle q) \\ \equiv (p \triangle \sim q)$$

$$21b. \sim p \triangle \sim q \equiv p \triangle q$$

Ejercicio 6:

Simplifique las siguientes fórmulas lógicas

I. $(p \wedge q) \rightarrow p$

II. $q \wedge \sim(p \rightarrow q)$

III. $[(p \wedge \sim q) \rightarrow q] \wedge (p \vee q)$

$$(p \wedge q) \rightarrow (p)$$

$$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee p$$

$$\equiv (\sim p \vee p) \vee \sim q$$

$$\equiv \mathbf{V} \vee \sim q$$

$$\equiv \mathbf{V}$$

$$q \wedge \sim(p \rightarrow q)$$

$$\equiv q \wedge \sim(\sim p \vee q)$$

$$\equiv q \wedge (\sim q \wedge p)$$

$$\equiv (q \wedge \sim q) \wedge p$$

$$\equiv \mathbf{F} \wedge p$$

$$\equiv \mathbf{F}$$

$$[(p \wedge \sim q) \rightarrow q] \wedge (p \vee q)$$

$$\equiv [(\sim p \vee q) \vee q] \wedge (p \vee q)$$

$$\equiv [\sim p \vee q] \wedge (p \vee q)$$

$$\equiv (q \vee \sim p) \wedge (q \vee p)$$

$$\equiv q \vee (\sim p \wedge p)$$

$$\equiv q \vee \mathbf{F}$$

$$\equiv q$$

Propuesto 3:

Simplifique

$$(\sim [(p \rightarrow q) \wedge \sim p]) \vee [(q \rightarrow p) \wedge \sim q]$$

Primera práctica 2022-1

Rpta: $q \rightarrow p$